LES NOMBRES COMPLEXES : UTILISATION

1) INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DE $\frac{c-a}{b-a}$

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Propriétés :

Soit A, B et C trois points distincts d'affixes respectives a , b et c . On a :

- $\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=\frac{AC}{AB}$
- $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC})\ [2\pi]$

Preuve :

- On a bien $a\neq b$ car les points sont distincts . On a alors :
  $\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=\frac{|c-a|}{|b-a|}=\frac{AC}{AB}$

- La preuve de la deuxième propriété nécessite de connaître quelques propriétés des angles orientés de vecteurs qui sont faciles à mettre en place en faisant un schéma.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan orienté . On a :
- Relation de Chasles : $(\vec{u}\,,\vec{v})+(\vec{v}\,,\vec{w})=(\vec{u}\,,\vec{w})\ [2\pi]$
- $(\vec{u}\,,\vec{v})=-(\vec{v}\,,\vec{u})\ [2\pi]$

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=\arg(c-a)-\arg(b-a) &=(\vec{u}\,,\overrightarrow{AC})-(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB})\ [2\pi]\\ &=-(\vec{u}\,,\overrightarrow{AB})+(\vec{u}\,,\overrightarrow{AC})\ [2\pi]\\ &=(\overrightarrow{AB}\,,\vec{u})+(\vec{u}\,,\overrightarrow{AC})\ [2\pi]\\ &=(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC})\ [2\pi]\ \text{(D'après la relation de Chasles)}\end{aligned}$$

Remarques :

Soit A, B et C trois points distincts d'affixes respectives a , b et c . On a :

- A appartient à la médiatrice de [BC] si et seulement si $\left|\frac{c-a}{b-a}\right|=1$
- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=0\ [\pi]$, ce qui revient à dire que $\frac{c-a}{b-a}$ est un réel.
- Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, ce qui revient à dire que $\frac{c-a}{b-a}$ est un imaginaire pur.

2) RACINES *n*-ièmes DE l'UNITÉ

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$.

Définition :

Soit n un entier naturel non nul.
On appelle racine *n*-ième de l'unité, tout nombre complexe z vérifiant $z^n=1$.

1 est bien sûr toujours une racine *n*-ième de l'unité

Remarque :

Les racines *n*-ième de l'unité sont les racines du polynôme $P(z)=z^n-1$

Propriété et définition :

Soit n un entier naturel non nul.
L'équation $z^n=1$ admet exactement n racines *n*-ièmes de l'unité distinctes.
Il s'agit des nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$

On note U_n l'ensemble des racines *n*-ièmes de l'unité

$U_n=\left\{e^{i\frac{2k\pi}{n}}\,,k\in\{0,1,2,\ldots n-1\}\right\}$

Preuve :

Soit n un entier naturel non nul et un complexe $z=r\,e^{i\theta}$ où $r\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$. On a :

$$z^n=1 \Leftrightarrow (re^{i\theta})^n=1 \Leftrightarrow r^n e^{in\theta}=1e^{i0} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n=1 \\ n\theta=0+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \theta=\dfrac{2k\pi}{n}, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Ainsi tous les nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k\in\mathbb{Z}$ sont solutions de l'équation $z^n=1$.

En particulier les nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ sont bien sûr solutions.

Soit K un entier quelconque.
En effectuant la division euclidienne de K par n, on obtient.
$K=qn+r$ où $r\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ et $q\in\mathbb{Z}$

Ainsi $e^{i\frac{2K\pi}{n}}=e^{i\frac{2(qn+r)\pi}{n}}=e^{i2q\pi}e^{\frac{i2r\pi}{n}}=e^{\frac{i2r\pi}{n}}$

On retrouve donc une solution de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k\in\{0,1,2,\ldots,n-1\}$ et on en déduit le résultat attendu.

Propriété :

Soit n un entier naturel non nul.
Les points images des éléments de U_n appartiennent au cercle trigonométrique.

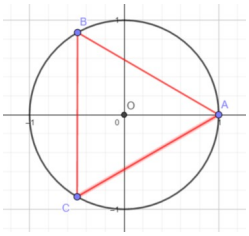
Pour $n\geqslant 3$, les points images des éléments de U_n sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets.

Ce qui est trivial, car ils ont pour module 1.

Quelques cas particuliers :

- Les racines 2-ièmes (ou racines carrées) de l'unité sont les nombres complexes tels que $z^2=1$.
  Dans ce cas on trouve facilement -1 et 1. On a $U_2=\{-1;1\}$

- Les racines 3-ièmes de l'unité sont les nombres complexes tels que $z^3=1$.
  Les solutions sont les nombres complexes :
  $e^{i\frac{2\times0\times\pi}{3}}=e^0=1$, $e^{i\frac{2\times1\times\pi}{3}}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{2\times2\times\pi}{3}}=e^{i\frac{4\pi}{3}}$
  On note :
  $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On a alors $\overline{j}=e^{i\frac{4\pi}{3}}$. Ainsi $U_3=\{1,j,\overline{j}\}$
  Les points images des éléments de U_3 sont les sommets du triangle équilatéral ABC.



- Les racines 4-ièmes de l'unité sont les nombres complexes tels que $z^4=1$.
  Dans ce cas on peut factoriser facilement pour déterminer les racines de l'unité :

  $$z^4=1 \Leftrightarrow z^4-1=0 \Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)=0$$

  Ainsi $U_4=\{1;i;-1;-i\}$

  Les points images des éléments de U_4 sont les sommets du carré ABCD.

