MATRICE - APPLICATION AUX SYSTEMES LINEAIRES

1) DEFINITION

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.
Une matrice de dimension n × p est un tableau de nombres réels comportant n lignes et p colonnes.
Ces nombres sont les coefficients de la matrice.
Lorsque n = p, on dit que la matrice est carrée d'ordre n.

Notation :
On utilise souvent des lettres majuscules pour désigner une matrice.
Toute matrice A est représentée comme ci-dessous.
a_{ij} désigne le terme de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne avec $1 \le i \le n$ et $1 \le j \le m$.

Colonnes → 1 … j … m

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

1 : i : n ↑ lignes

Ex :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2 × 3
Le coefficient de la $2^{ème}$ ligne et $1^{ère}$ colonne est 3 . On note $a_{21} = 3$

Vecteur-ligne et vecteur-colonne :
Une matrice comportant une ligne et p colonnes s'appelle un vecteur-ligne de dimension p.
Une matrice comportant une colonne et n lignes s'appelle un vecteur-colonne de dimension n.
Matrice carrée :
Lorsque n = p, on dit que la matrice est carrée d'ordre n.
Matrice diagonale :
Une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux formant la diagonale issue du coin supérieur gauche, est appelée matrice diagonale. (Certains termes situés sur la diagonales peuvent être nuls)
Matrice unité :
Une matrice diagonale dont tous les coefficients de la diagonales sont égaux à 1 est appelée matrice unité.
Matrice nulle :
Une matrice dont tous les coefficients sont nuls est appelée matrice nulle.
Transposée d'une matrice :
La transposée d'une matrice A est une matrice dont toutes les colonnes sont les lignes de A. On la note ${}^t A$

Ex :

- (2 4 6 1) est vecteur-ligne de dimension 4
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur-colonne de dimension 3
- $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2
- $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale d'ordre 3
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice unité d'ordre 3. On la note I_3
- La transposée de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice ${}^t A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2) OPERATIONS SUR LES MATRICES

A) EGALITE

Dire que deux matrices sont égales signifie qu'elles ont les mêmes dimensions et les mêmes coefficients aux mêmes emplacements.

Ex :
$(2 \quad 0{,}5) = \begin{pmatrix} \frac{4}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\qquad (2 \quad 0{,}5) \neq \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ $\qquad (2 \quad 0{,}5) \neq (0{,}5 \quad 2)$

B) ADDITION ET SOUSTRACTION

Soit A et B deux matrices de dimension m × p.
La somme de A et B est la matrice de dimension m × p , notée A + B , obtenue en additionnant deux à deux les coefficients qui ont la même position.
La différence A – B est définie de manière analogue.
On appelle **matrice opposée** de la matrice A la matrice, notée – A, obtenue en remplaçant chaque terme de A par son opposé.
On a A – B = A + (– B)

Ex :
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 4 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ On a : $A + B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 9 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, $A - B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 7 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$ et $-B = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -1 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

C) MULTIPLICATION PAR UN REEL

Soit A une matrice de dimension m × p et k un réel.
Le produit de la matrice A par le réel k est la matrice de dimension m × p , notée k A, obtenue en multipliant par k chaque coefficient de A.

Ex :

$3A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 24 & 12 \\ 21 & 3 \end{pmatrix}$

D) PROPRIETES

Soit A, B et C trois matrices de dimension m × p , k et k' deux réels. On a :

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$
- $k(A + B) = kA + kB$
- $M + O = O + M = M$ (où O est la matrice nulle de dimension m × p)
- $(k + k')A = kA + k'A$
- $k(k'A) = kk'A$

Rem :

- L'addition est commutative (égalité 1) et associative (égalité 2)
- Soit X une matrice de dimension m × p . Si $X + A = B$, alors, en ajoutant $-A$ aux deux membres de l'égalité, on obtient $X = B - A$

Ex :

Soit $M = 3(A + 5B) - 16B$.
On a : $M = 3A + 15B - 16B = 3A - B$.

Ainsi , $M = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 24 & 12 \\ 21 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 23 & 7 \\ 22 & 1 \end{pmatrix}$

3) MULTIPLICATION DE DEUX MATRICES

A) PRODUIT D'UN VECTEUR LIGNE PAR UN VECTEUR COLONNE

On appelle produit du vecteur ligne $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$ par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ le nombre $(a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_p b_p$

Ex :

$(2 \ 4 \ 6)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = 2 \times 2 + 3 \times 4 + 6 \times \sqrt{2} = 16 + 6\sqrt{2}$

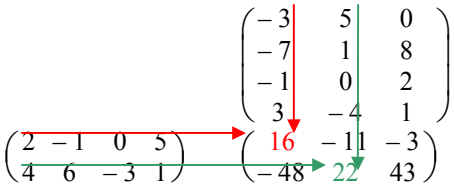
Rem :

Le nombre de colonnes du vecteur ligne doit être égal au nombre de lignes du vecteur colonne.

B) CAS GENERAL

On appelle **produit** d'une matrice A de dimension n × **p** par une matrice B de dimension **p** × q la matrice notée AB de dimension n × q obtenue de la façon suivante :
Le coefficient de la ligne l et de la colonne c de AB est le produit du vecteur-ligne l de A par le vecteur-colonne c de B.

Une disposition pratique :



On a donc $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ 4 & 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 & 0 \\ -7 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -11 & -3 \\ -48 & 22 & 43 \end{pmatrix}$

Rem :

- AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est egal au nombre de lignes de B
- La règle concernant les dimensions peut être shématisée de la façon suivante : (n , p) × (p , q) = (n , q)
- Quand les dimensions de deux matrices A et B permettent le calcul de AB , elles ne permettent pas forcément le calcul de BA. Dans le cas où les calculs sont possibles, en général les matrices AB et BA ne sont pas égales.
- Si A est une matrice carrée, la matrice AA est notée A^2

Ex :

- $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, mais $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'a pas de sens
- $(3 \ 0)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}(3 \ 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

C) PROPRIETES

Soit A, B et C trois matrices permettant les calculs indiqués , et k un réel. On a :

- $A(BC) = (AB)C = ABC$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $(A+B)C = AC + BC$
- $(kA)B = k(AB) = A(kB) = kAB$

Rem :

- Si A est une matrice carrée, AAA est notée A^3 ...
- En général $AB \neq BA$ (la multiplication n'est pas commutative)
- Si A est une matrice carrée d'ordre n et I_n la matrice unité d'ordre n , on a : $A \times I_n = I_n \times A = A$
  (ce qui explique que I_n est appellée "matrice unité")

4) INVERSE D'UNE MATRICE

A) DEFINITION

Soit A une matrice carrée d'ordre n et I_n la matrice diagonale d'ordre n.
Dire que la matrice carrée B d'ordre n est l'inverse de A revient à dire que $AB = I_n$.

L'inverse de A est notée A^{-1} .

Rem :

- La condition "$AB = I_n$" est équivalente à la condition "$BA = I_n$" . (De façon générale, on n'a pas AB = BA)
- Si la matrice B est l'inverse de la matrice A, alors la matrice A est l'inverse de la matrice B . On dit que les matrices A et B sont inverses l'une de l'autre.
- On a $A A^{-1} = A^{-1} A = I_n$
- Une matrice n'admet pas forcément d'inverse . Dans ce cas on dit qu'elle n'est pas inversible.
- Si une matrice est inversible, alors l'inverse est unique.

Ex :

Démontrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 1{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

On a : $AB = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}8 & 1{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$

B) RECHERCHE DE L'INVERSE D'UNE MATRICE

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. On cherche une matrice N telle que $MN = I_2$

On pose $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On a $MN = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 2a-c & 2b-d \end{pmatrix}$

Ainsi,

$$MN = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 2a-c & 2b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2c=1 \\ 3b+2d=0 \\ 2a-c=0 \\ 2b-d=1 \end{cases}$$

Le systéme précédent se ramène aux deux systèmes suivants :

$(S_1)\ \begin{cases} 3a+2c=1 \\ 2a-c=0 \end{cases}$ et $(S_2)\ \begin{cases} 3b+2d=0 \\ 2b-d=1 \end{cases}$

Le déterminant de ces deux systèmes est $-7 \neq 0$
Ainsi ces deux systèmes admettent une unique solution.
On trouve ... $a = \frac{1}{7}$, $b = \frac{2}{7}$, $c = \frac{2}{7}$ et $d = -\frac{3}{7}$

On en déduit que la matrice M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$

Rem :

- Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2
  - A est inversible si, et seulement si $ad - bc \neq 0$.
  - Si A est inversible, on démontre facilement que $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- La plupart des calculatrices fournissent l'inverse d'une matrice quand elle existe. (vous pouvez aussi utiliser un tableur ou un logiciel de calcul formel)
  Seuls les logiciels de calcul formel fournissent des valeurs exactes.

5) APPLICATION A LA RESOLUTION D'UN SYSTEME

A) ECRITURE MATRICIELLE D'UN SYSTEME LINEAIRE

Soit le système (S) $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

Posons $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

On a :

$MX = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 2x - y \end{pmatrix}$

Ainsi ,

$MX = C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ 2x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

On peut donc écrire le systéme (S) sous la forme MX = C

De la même façon, on peut écrire tout système linéaire sous forme matricielle.

B) RESOLUTION D'UN SYTEME

On a vu que la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et que son inverse est $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$

D'autre part, on a :

M X = C

En multipliant à gauche les deux membres de cette égalité par M^{-1}, on obtient :

$M^{-1}(M X) = M^{-1} C \Leftrightarrow (M^{-1} M) X = M^{-1} C \Leftrightarrow I_2 X = M^{-1} C \Leftrightarrow X = M^{-1} C$

On en déduit que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

Ainsi $x = \frac{5}{7}$ et $y = -\frac{4}{7}$